Transformacije podudarnosti u ravni

Identična transformacija (identitet)

Identična transformacija ili identitet preslikava svaku tačku ravni u samu sebe. Obilježavamo je sa id.

$$id(A)=A, \quad id(a)=a$$
$$id(\alpha)=\alpha$$

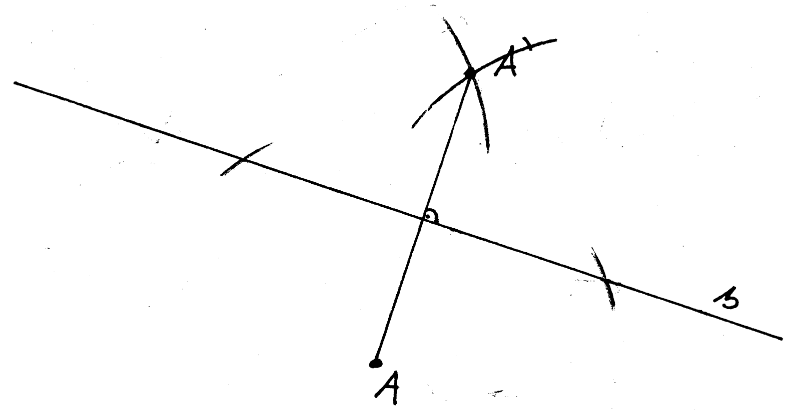
Osna simetrija

$$\sigma_s : \alpha \rightarrow \alpha$$

Za osnu simetriju σ_s vrijede dvije osobine:

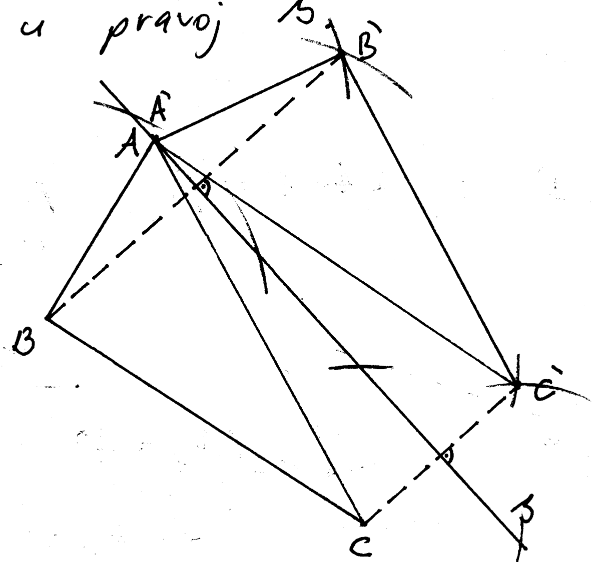
a) $S \in s \Rightarrow \sigma_s(S)=S$

b) $S \notin s \Rightarrow \sigma_s(A)=A'$: s simetrala duži AA'



1. Data je prava s i trougao ΔABC (takav da $A \in s$, $B, C \notin s$). Trougao ΔABC preslikati osnom simetrijom s osom u pravoj s.

Rj.



$\sigma_s(\Delta ABC)=\Delta A'B'C'$

gdje $A \equiv A'$

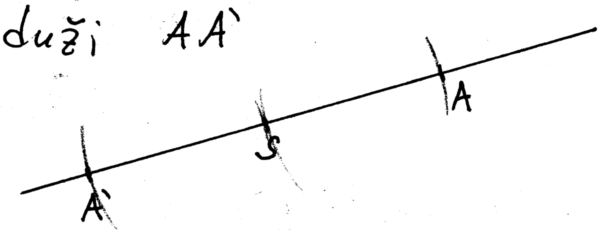
Centralna simetrija

$$\sigma_S : \alpha \to \alpha$$

Centralna simetrija σ_S ispunjava dvije osobine:

a) $\sigma_S(S) = S$

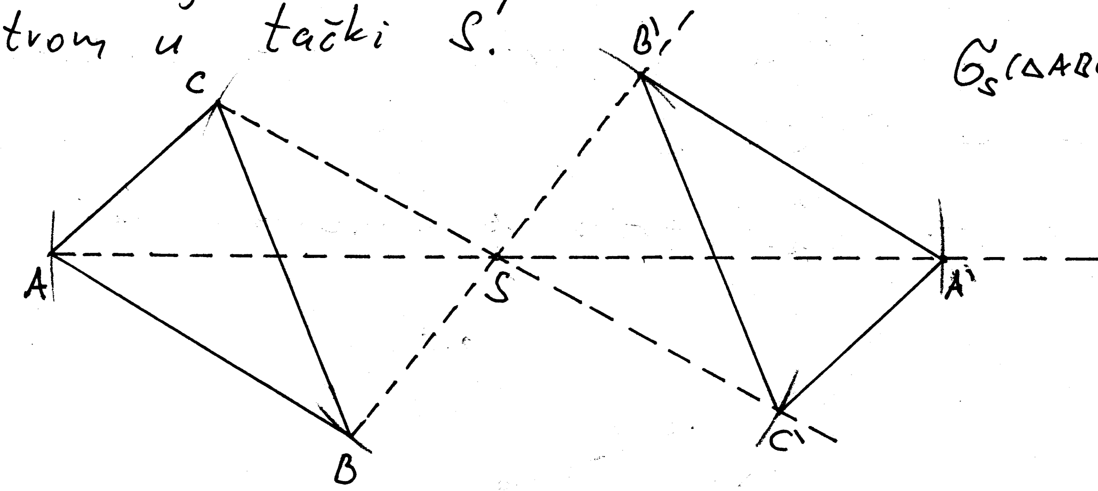
b) $\sigma_S(A) = A' : S$ sredina duži AA'



2. Dat je trougao ΔABC i tačka S u vanjskoj oblasti trougla. Trougao ΔABC preslikati centralnom simetrijom s centrom u tački S.

$\sigma_S(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$

Rj.



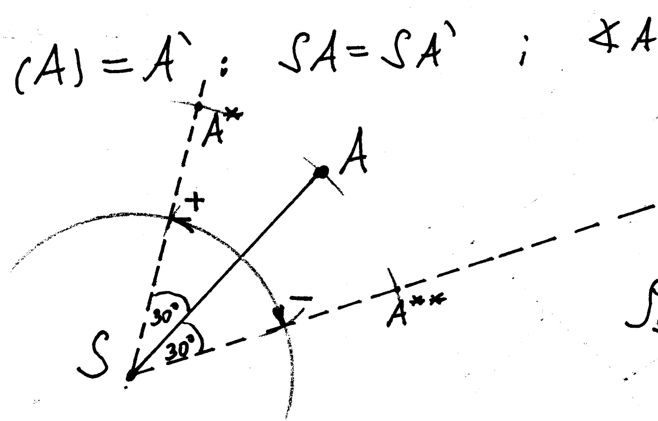
Rotacija

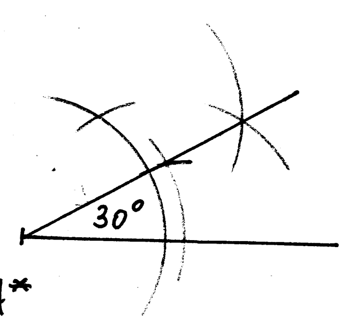
$$\rho_{S,\cdot,\pm} : \alpha \to \alpha$$

Svaka rotacija $\rho_{S,\varphi,\pm}$ ispunjava dvije osobine:

a) $\rho_{S,\varphi,\pm}(S) = S$

b) $\rho_{S,\varphi,\pm}(A) = A' : SA = SA'$ i $\measuredangle ASA' = \varphi$





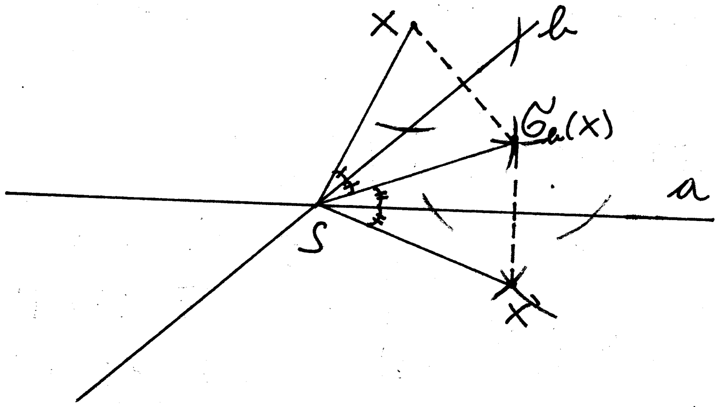
$\rho_{S,30°,+}(A) = A^*$

$\rho_{S,30°,-}(A) = A^{**}$

Rotacija se definiše kao kompozicija dvije osne simetrije.

$$\sigma_a \circ \sigma_b \quad (a \not\equiv b), \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\sigma_a \circ \sigma_b (X) = \sigma_a(\sigma_b(X)) = X'$$



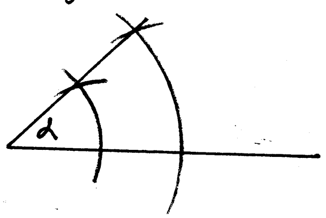
$SX = SX'$

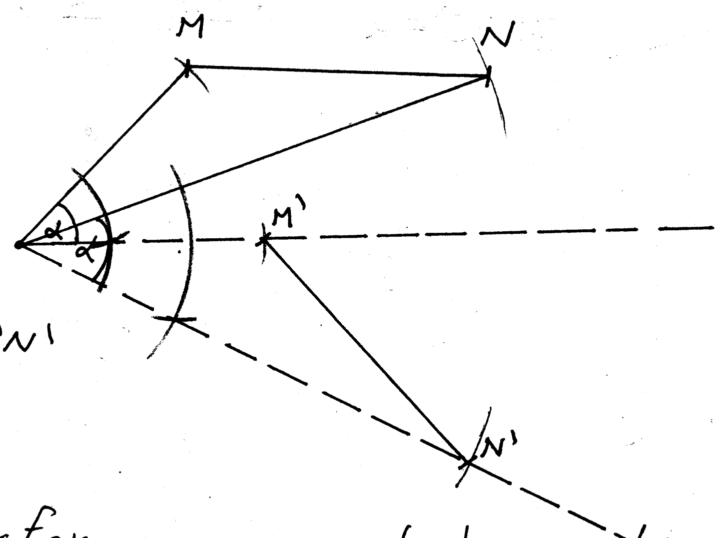
$\sphericalangle XSX' = 2 \cdot \sphericalangle aSb$

$\sigma_a \circ \sigma_b (X)$ je rotacija tačke X oko tačke S $(\{S\} = a \cap b)$ za ugao $2 \cdot \sphericalangle aSb$.

(3.) Data je duž MN, ugao α i tačka $S \notin MN$. Duž MN rotirati oko tačke S za ugao α u negativnom smijeru.

Rj.





$\rho_{S,\alpha,-}(MN) = M'N'$

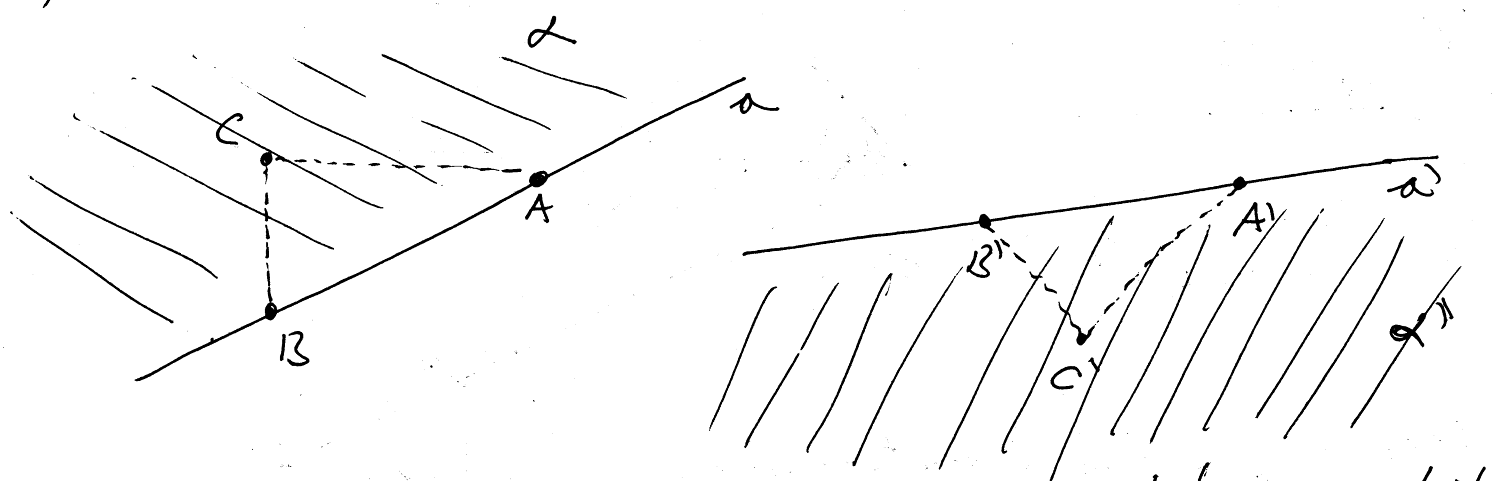
<u>Teorema</u> Svaka transformacija podudarnosti u ravni jednoznačno je određena djelovanjem na tri nekolinearne tačke.

4. Neka su h i h' poluprave pravih a i a' respektivno sa početnim tačkama A i A'. Neka su α i α' uočene poluravni s obzirom na prave a i a' redom. Dokazati da postoji tačno jedna transformacija podudarnosti koja preslikava tačku A u A', polupravu h u h' i poluravan α u α'.

Rj. h i h' polupr. sa poč. tačkama A i A'
a, a' prave
$h \subseteq a$, $h' \subseteq a'$
α i α' ravni sa ivicom u a i a'

$\Rightarrow \exists!$ transf. pod. Π:
$\Pi(A) = A'$
$\Pi(h) = h'$
$\Pi(\alpha) = \alpha'$

Da bi smo pokazali egzistenciju bilo koje transformacije podudarnosti potrebno ju je definisati na tri nekolinearne tačke.
Za naš zadatak primjetimo da
a) $\forall B \in h \quad \exists! B' \in h: AB \cong A'B'$
b) $\forall C \in \alpha \quad \exists! C' \in \alpha: \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Transformaciju Π ćemo definisati na tri nekolinearne tačke
$\Pi(A) = A'$
$\Pi(B) = B'$ gdje je $B \in h$ i $AB \cong A'B'$
$\Pi(C) = C'$ gdje je $C \in \alpha$ i $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

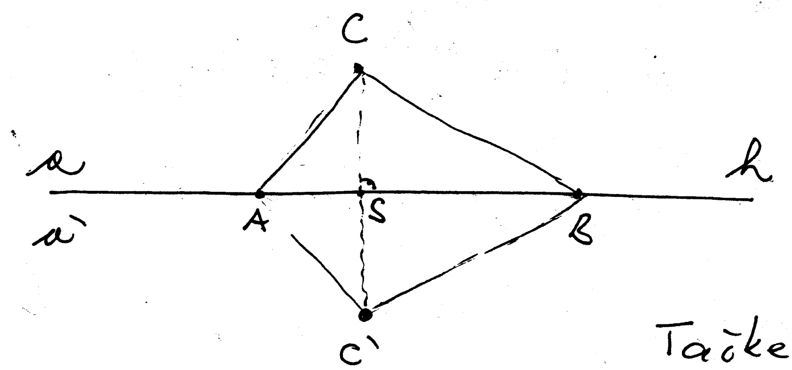
Ovako definisana transformacija podudarnosti Π preslikava

tačku A u A', polupravu h u h' i ravan α u α'.
Jedinstvenost ove transformacije slijedi iz navedene teoreme.

Primjetimo da se u zadatku ne traži da odredimo šta je Π, nego da pokažemo da postoji. Prema tome zadatak je riješen.

(5) Odrediti sve transformacije podudarnosti u ravni koje preslikavaju polupravu h na samu sebe.

Rj.
polupravа h
transform. podud. Π: $\Pi(h)=h$ $\Big\} \Rightarrow \Pi = ?$



Neka je a' poluprava sa početnom tačkom A koja dopunjuje polupravu h do prave a.
Uzmimo tačku $B \in h$ i tačku $C \notin a$.
Tačke A, B i C su nekolinearne.

Pokazaćemo prvo da postoji, pa ćemo odrediti šta je u stvari ta transformacija.

a) Definišimo Π na sljedeći način

$\Pi(A)=A$
$\Pi(B)=B$
$\Pi(C)=C$

A, B, C nekolinearne $\Rightarrow$ $\Pi(h)=h$.
šta je Π?
Identična transformacija svaku svoju tačku preslikava na samu sebe pa je
$\Pi \equiv id$ tj. $id(h)=h$.

b) Posmatrajmo transformaciju podudarnosti koja ima sljedeće osobine: $\Pi(A)=A$
$\Pi(B)=B$
$\Pi(C)=C'$: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

A, B, C nekolinearne
$\Pi(h)=h$

Šta je Π?

C i C' leže u različitim poluravnima s ivicom u pravoj a

$\Rightarrow CC' \cap a = \{S\} \quad \Rightarrow \sphericalangle CSA \cong \sphericalangle C'SA =$ prav ugao

$\Delta ABC \cong \Delta ABC' \quad \Rightarrow \quad AC = AC'$

$$\left.\begin{aligned} AC &\cong A'C' \\ AS &\cong AS \\ \sphericalangle ASC &\cong \sphericalangle ASC' = \text{prav ugao} \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\substack{\text{(ugao}\\ \text{naspram}\\ \text{veće}\\ \text{stranice)}}]{SSU} \Delta ASC \cong \Delta ASC'$$

$$\Downarrow$$

$$CS \cong C'S$$

$$\Downarrow$$

a simetrala duži CC'

pa $\sigma_a(C) = C'$

Sad imamo

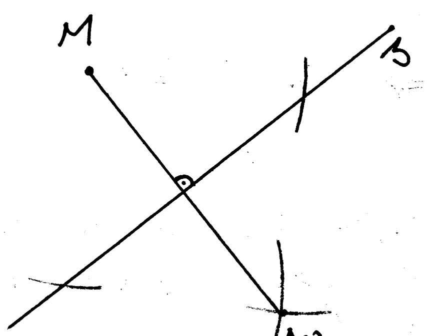
$$\left.\begin{aligned} \sigma_a(A) &= A \quad (A \in a) \\ \sigma_a(B) &= B \quad (B \in a) \\ \sigma_a(C) &= C' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Pi \equiv \sigma_a$$

tj. $\sigma_a(h) = h$

Našli smo dvije transformacije podudarnosti

1. identitet
2. osna simetrija u pravoj koja sadrži polupravu h.

Osobine osne simetrije



$$\sigma_s(\sigma_s(M)) = M$$

$$M \xrightarrow{\sigma_s} M'$$

$$M \xleftarrow{\sigma_s} M'$$

$$\sigma_s \circ \sigma_s = \sigma_s^2 = id$$

involutivna transformacija (involucija)

(transformacija koja je sama sebi inverzna)

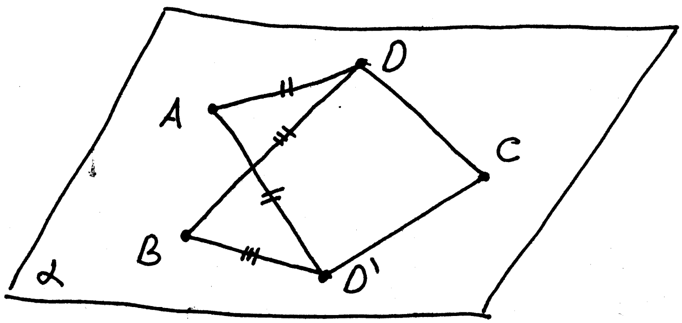
Involucija ne mora biti podudarnost.

(#) Ako je π transformacija podudarnosti za koju važi $\pi(A)=A$, $\pi(B)=B$, $\pi(C)=C$ gdje su A, B i C tri nekolinearne tačke, tada je π identitet. Dokazati.

Rj. postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \pi(A)=A,\ \pi(B)=B,\ \pi(C)=C \\ A, B, C \text{ nekolinearne tačke} \\ A\not\equiv B,\ A\not\equiv C,\ B\not\equiv C \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \text{ identitet}$$

Neka je α ravan koja sadrži tačke A, B, C. Uzmimo proizvoljnu tačku D koja pripada ravni α.



Neka je $\pi(D)=D'$. ($D\not\equiv A$, $D\not\equiv B$ i $D\not\equiv C$)

Ako pokažemo da je $D\equiv D'$, kako je D proizvoljna tačka ravni time ćemo pokazati da je π identitet.

Pretpostavimo da je $D\not\equiv D'$.

Transformacija podudarnosti čuva dužine pa je

$$AD \cong \pi(A)\pi(D) \cong AD' \Rightarrow A \text{ pripada simetrali duži } DD' \quad (1)$$

$$BD \cong \pi(B)\pi(D) \cong BD' \Rightarrow B \text{ pripada simetrali duži } DD' \quad (2)$$

$$CD \cong \pi(C)\pi(D) \cong CD' \Rightarrow C \text{ pripada simetrali duži } DD' \quad (3)$$

Kako su A, B i C nekolinearne tačke to se dvije tačke moraju nalaziti sa iste strane $p(D,D')$ pa neka su to tačke A i B.

Iz (1) i (2) $\Rightarrow A\equiv B$

#kontradikcija.

Pretpostavka da je $D\not\equiv D'$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $D\equiv D' \Rightarrow \pi$ je identitet

q. e. d.

(#) Neka je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$. Dokazati sljedeća tvrđenja:

a) Ako se prave a i b sijeku u tački S, tada se i prave c i d sijeku u tački S;

b) Ako su prave a i b normalne na pravu s, tada su i prave c i d normalne na pravu s.

Rj. a) postavka zadatka:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \\ a \cap b = \{S\} \end{array}\right\} \Rightarrow c \cap d = \{S\}$$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_c = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c = \gamma$

$\gamma(S) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(S) = \sigma_a(\sigma_b(S)) \overset{S \in b}{=} \sigma_a(S) \overset{S \in a}{=} S$

Prema tome $\gamma(S) = S$ ...(*)

Neka je $\sigma_c(S) = S'$, $S' \not\equiv S$. Imamo:

$\gamma(S) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(S) = \sigma_d(\sigma_c(S)) = \sigma_d(S') \overset{(*)}{=} S$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(S) = S' \Rightarrow \text{prava } c \text{ simetrala } SS' \\ \sigma_d(S') = S \Rightarrow \text{prava } d \text{ simetrala duži } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$$

$\Downarrow$

$\sigma_d \circ \sigma_c = id \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = id \Rightarrow a \equiv b \Rightarrow a \cap b = a \equiv b$

kontradikcija ($a \cap b = \{S\}$).

Pretpostavka da je $\sigma_c(S) = S'$, $S' \not\equiv S$ nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\sigma_c(S) = S$. Dalje imamo

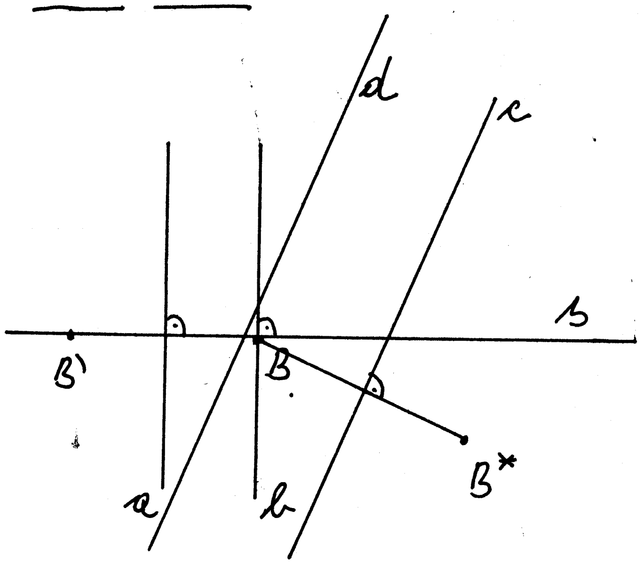
$\gamma(S) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(S) = \sigma_d(\sigma_c(S)) = \sigma_d(S) \overset{(*)}{=} S$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_c(S) = S \Rightarrow S \in c \\ \sigma_d(S) = S \Rightarrow S \in d \end{array}\right\} \Rightarrow S \in c \cap d$$

tj. $c \cap d = \{S\}$

b) postavka zadatka

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \\ a \perp s,\ b \perp s \\ s \text{ data prava} \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp s \text{ i } d \perp s$$



Prvu stvar koju možemo primijetiti je da su prave c i d paralelne. Zašto?

Ako bi se prave c i d sijekle u nekoj tački S tada prema dijelu a) zadatka

$a \cap b = \{S\}$

#kontradikcija

$(a \perp s,\ b \perp s,\ a \cap b = \emptyset)$

Prema tome $c \parallel d$.

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c \text{ sa desne strane}$$

$$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c = \gamma$$

označimo ovu transformaciju podudarnost sa γ

Neka je $b \cap s = \{B\}$

$$\gamma(B) = (\sigma_a \circ \sigma_b)(B) = \sigma_a(\sigma_b(B)) = \overset{B \in b}{=} \sigma_a(B) = B'$$

Prema tome:

$$\gamma(B) = B' \quad \dots (\Delta)$$

Neka je $\sigma_c(B) = B^*$

$$\gamma(B) = (\sigma_d \circ \sigma_c)(B) = \sigma_d(\sigma_c(B)) = \sigma_d(B^*) \overset{(\Delta)}{=} B' \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } BB^* \\ \Rightarrow d \text{ simetrala } B^*B' \\ c \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ tačke B, B^* i B' su kolinearne.

Kako su $B, B' \in s$ to je i $B^* \in s$

$$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } BB^* \Rightarrow c \perp p(B, B^*) \\ d \text{ simetrala } B^*B' \Rightarrow d \perp p(B^*, B') \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp s \text{ i } d \perp s$$

q.e.d.

Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju eliptičnom pramenu pravih.

Napomena: Eliptičan pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku.

Rj.

„$\Leftarrow$": $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \Rightarrow a, b$ i c pripadaju eliptičnom pramenu pravih

— — $\underline{a, b}, c, d$ tri različite prave

Kako pokazati da tri prave pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih?

Trebamo pokazati da se a, b i c sijeku u istoj tački.

Neka je $a \cap b = \{S\}$

$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d \quad / \circ \sigma_c$ sa desne strane

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_d \circ \sigma_c$

$\sigma_a \circ \sigma_b (S) = \sigma_d \circ \sigma_c (S) \quad \Rightarrow \quad \sigma_d \circ \sigma_c (S) = S$

Ako bi pretpostavili da je $\sigma_c(S) = S'$ $(S' \neq S)$ dobili bi da

$\sigma_d \circ \sigma_c (S) = \sigma_d (S') = S \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} c \text{ simetrala } SS' \\ d \text{ simetrala } SS' \end{array}\right\} \Rightarrow c \equiv d$

kontrad. (sa $c \not\equiv d$)

Prema tome ako je

$\sigma_d \circ \sigma_c (S) = S$ i

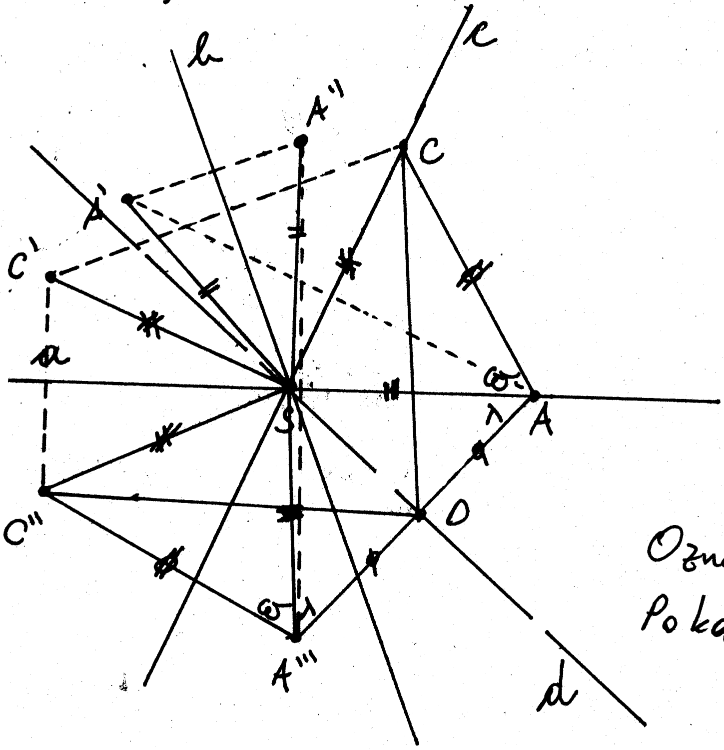
$\sigma_c(S) = S$ to znači (to je moguće samo u slučaju) da se c i d sijeku u tački S.

$\Rightarrow a \cap b \cap c = \{S\} \Rightarrow a, b$ i c pripadaju istom eliptičnom pramenu pravih

— — —

„$\Rightarrow$": a, b, c pripadaju eliptičnom pramenu $\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ je osna simetrija.

Neka je $a \cap b \cap e = \{S\}$. Označimo sa $\gamma = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_e$



a) posmatrajmo tačku S

$\gamma(S) = S$

b) uzmimo proizvoljnu tačku $A \in a$, $A \neq S$. Neka je

$\sigma_e(A) = A'$, $\sigma_b(A') = A''$, $\sigma_a(A'') = A'''$

tj. $\gamma(A) = A'''$

Označimo sa d simetralu duži AA'''. Pokažimo da je $S \in d$.

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_e(A) = A' \Rightarrow SA \cong SA' \\ \sigma_b(A') = A'' \Rightarrow SA' \cong SA'' \\ \sigma_a(A'') = A''' \Rightarrow SA'' = SA''' \end{array}\right\} \Rightarrow SA \cong SA'''$$

$\Delta SA'''A$ je jkk sa osnovicom AA''' $\Rightarrow S \in d$

(d sadrži visinu)

c) Uzmimo proizvoljnu tačku $C \in e$, $C \neq S$. Neka je

$\sigma_e(C) = C$, $\sigma_b(C) = C'$, $\sigma_a(C') = C''$ tj. $\gamma(C) = C''$.

Pokažimo da je d simetrala duži CC''.

Označimo sa $\{D\} = d \cap AA'''$.

Iz dijela b) smo dobili da je $AD \cong A'''D$ i $\measuredangle DAS \cong \measuredangle DA'''S = \lambda$

Podudarnost čuva dužine pa je $AC \cong \gamma(A)\gamma(C) = A'''C''$

Dalje imamo
$$\left.\begin{array}{l} CS \cong C''S \\ AC \cong A'''C'' \\ AS \cong A'''S \end{array}\right\} \overset{sss}{\Longrightarrow} \Delta A'''SC'' \cong \Delta ASC$$
$$\Downarrow$$
$$\measuredangle C''A'''S \cong \measuredangle SAC = \omega$$

Posmatrajmo $\Delta C''A'''D$ i ΔACD. U njima su podudarni SUS pa su ta dva trougla podudarna $\Rightarrow CD \cong C''D \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta CC''D$ je jkk sa osnovicom CC'' $\Rightarrow d$ simetrala CC''

Sad imamo
$$\left.\begin{array}{l} \gamma(S) = S \\ \gamma(A) = A''' \\ \gamma(C) = C'' \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \sigma_d(S) = S \\ \sigma_d(A) = A''' \\ \sigma_d(C'') = C'' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{nekolinearni}]{A,\,S,\,C} \sigma_d = \gamma \text{ tj } \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_e = \sigma_d$$

q.e.d.

(#) Dokazati da je samo tačka S, $\{S\}=a\cap b$ fiksna tačka transformacije podudarnosti $\Pi=\sigma_a\circ\sigma_b$ $(a\not\equiv b)$.

Rj. postavka zadatka

| Napomena: Transformacija $\sigma_a\circ\sigma_b$ predstavlja rotaciju oko tačke S.

$$\left.\begin{array}{l}a \text{ i } b \text{ prave}\\ a\not\equiv b\\ \{S\}=a\cap b\\ \Pi=\sigma_a\circ\sigma_b\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\Pi(S)=S\\ \forall(X\not\equiv S)\ \Pi(X)=X' : X'\not\equiv X\end{array}$$

---

a) Provjerimo da li je tačka S fiksna tačka transformacije podudarnosti Π

$$\Pi(S)=\sigma_a\circ\sigma_b(S)=\sigma_a(\sigma_b(S))\overset{S\in b}{=}\sigma_a(S)\overset{S\in a}{=}S \quad \text{tj. } \Pi(S)=S$$

Tačka S jest fiksna tačka transformacije

b) Pokažimo jedinstvenost tačke S. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da pored tačke S postoji tačka $X\not\equiv S$ takva da $\Pi(X)=X$.

$a\cap b=\{S\}$ i $X\not\equiv S \Rightarrow X\in a\cap b$ Razmotrimo dva slučaja:

1° $X\in b$

Tad $\sigma_b(X)=X$ i $\Pi(X)=\sigma_a(\sigma_b(X))\overset{X\in b}{=}\sigma_a(X)\overset{\Pi(X)=X}{=}X \Rightarrow$

$\Rightarrow X\in a$ (kako je i $X\in b$) $\Rightarrow X\in a\cap b \Rightarrow X\equiv S$ # kontradik. $(X\not\equiv S)$

2° $X\notin b$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Tad } \sigma_b(X)=X' \text{ i } X\not\equiv X' \ (b \text{ simetrala duži } XX')\\ \Pi(X)=\sigma_a(\sigma_b(X))=\sigma_a(X')\overset{\Pi(X)=X}{=}X \ (a \text{ simetrala duži } XX')\end{array}\right\}\Rightarrow$$

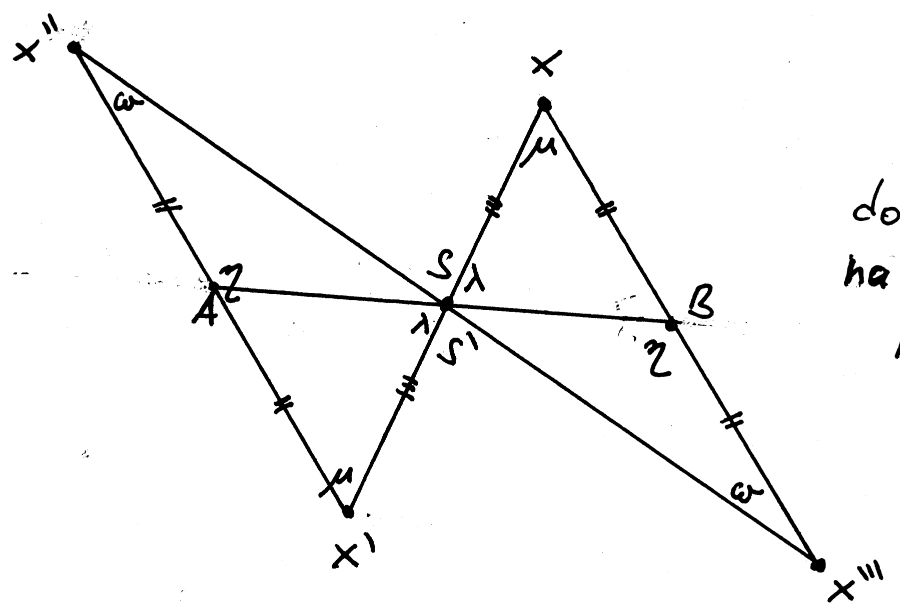
$\Rightarrow a$ i b simetrale duži $XX' \Rightarrow a\equiv b$ # kontradikcija (sa $a\not\equiv b$)

Pretpostavka da tačka S nije jedina fiksna tačka transformacije podudarnosti Π nas dovodi u kontradikciju pa nije tačna.

Prema tome: S je jedina fiksna tačka transformacije Π q.e.d.

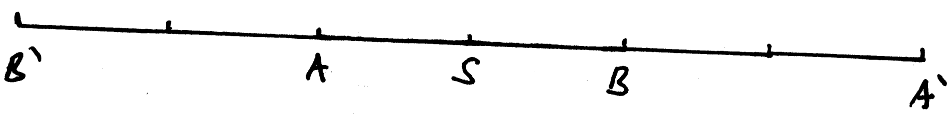
(#) Dokazati da je S sredina duži AB ako i samo ako vrijedi da je $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$.

Rj. „$\Rightarrow$": S sredina duži AB $\Rightarrow$ $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$.



Da bi dokazali jednakost
$\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$
dovoljno ju je dokazati na tri nekolinearne tačke.
Posmatraćemo tačke A, B i $X \notin p(A,B)$.
S je sredina duži AB.

a) $(\sigma_A \circ \sigma_S)(A) = \sigma_A(\sigma_S(A)) = \sigma_A(B) = B'$ (A je sredina BB')
$(\sigma_S \circ \sigma_B)(A) = \sigma_S(\sigma_B(A)) = \sigma_S(A')$ (B je sredina AA')



$$\left.\begin{array}{l} BA \cong B'A \\ AB \cong A'B \\ AS \cong BS \end{array}\right\} B'S \cong A'S$$

$\Rightarrow \sigma_S(A') = B'$ Prema tome $(\sigma_A \circ \sigma_S)(A) = (\sigma_S \circ \sigma_B)(A)$

b) $$\left.\begin{array}{l} (\sigma_A \circ \sigma_S)(B) = \sigma_A(\sigma_S(B)) = \sigma_A(A) = A \\ (\sigma_S \circ \sigma_B)(B) = \sigma_S(\sigma_B(B)) = \sigma_S(B) = A \end{array}\right\} \Rightarrow (\sigma_A \circ \sigma_S)(B) = (\sigma_S \circ \sigma_B)(B)$$

c) $(\sigma_A \circ \sigma_S)(X) = \sigma_A(\sigma_S(X)) = \sigma_A(X')$ ($SX \cong SX'$) (S sredina XX')
$\sigma_A(X') = X''$ ($AX' \cong AX''$) (A sredina $X'X''$)

$(\sigma_S \circ \sigma_B)(X) = \sigma_S(\sigma_B(X)) = \sigma_S(X''')$ (B sredina XX''') ($XB \cong X'''B$)

Trebamo pokazati da je S sredina $X''X'''$.

$$\left.\begin{array}{l} XS \cong X'S \\ \measuredangle XSB \cong \measuredangle X'SA = \lambda \\ AS \cong BS \end{array}\right\} \xrightarrow{SUS} \triangle XSB \cong \triangle ASX'$$
$$\Downarrow$$
$$AX' \cong BX \; ; \; \measuredangle SXB \cong \measuredangle SX'A = \mu$$

Primjetimo sad da je $x'x'' \cong xx'''$, i primjetimo da je

$\mu(x',x'') \parallel \mu(x,x''') \Rightarrow \sphericalangle Ax''S \cong \sphericalangle Bx'''S$ i $\sphericalangle x''AS \cong \sphericalangle x'''BS = \eta$

Ako sa S' označim presjek $\{S'\} = AB \cap x''x'''$ iz podudarnosti SUS (ugao ω, $Ax'' \cong Bx'''$, ugao η) slijedi da je $\Delta x''AS' \cong \Delta x'''BS'$

$$\Downarrow$$
$$AS' \cong BS'$$
$$\text{tj. } S \equiv S'$$

Konačno iz

$$\left.\begin{array}{l} x'x'' \cong xx''' \\ \sphericalangle x''x'S = \sphericalangle Sxx''' = \mu \\ xS \cong x'S \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta x''x'S \cong \Delta Sxx'''$$

$$\Downarrow$$
$$x''S \cong x'''S$$

(S je sredina duži $x''x'''$)

Znači $\sigma_S(x''') = x''$

Dobili smo $(\sigma_A \circ \sigma_S)(x) = (\sigma_S \circ \sigma_B)(x)$

Prema tome, iz a), b) i c) $\Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$

q.e.d.

"$\Leftarrow$": $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B \Rightarrow S$ sredina duži AB

$\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B \quad / \circ \sigma_S$ sa desne

$\sigma_A = \sigma_S \circ \sigma_B \circ \sigma_S \qquad$ Označimo sa $\gamma = \sigma_S \circ \sigma_B \circ \sigma_S$.

Nije teško pokazati da je γ involutivna transformacija čija je jedina fiksna tačka $\sigma_S(B)$ (OVE DVIJE TVRDNJE DOKAZATI ZA VJEŽBU).

Prema tome imamo ili a) γ je identitet ili
b) γ je osna simetrija
c) γ je centralna simetrija

a) i b) nije (ZAŠTO) $\Rightarrow \gamma$ je centralna simetrija sa centrom u tački $\sigma_S(B) \Rightarrow \sigma_A = \sigma_{\sigma_S(B)} \Rightarrow A = \sigma_S(B)$

$\Rightarrow S$ je sredina duži AB

q.e.d.

6\. Dokazati da je samo tačka S, $\{S\} = a \cap b$, fiksna tačka transformacije podudarnosti $\Pi = \sigma_a \circ \sigma_b$ $(a \neq b)$.

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ i } b \text{ prave}, a \not\equiv b \\ \{S\} = a \cap b \\ \Pi = \sigma_a \circ \sigma_b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Pi(S) = S \\ \text{i } \forall (X \neq S)\ \Pi(X) = X' : X \neq X' \end{array}$$

Provjerimo da li je tačka S fiksna tačka transformacije podudarnosti Π

$$\Pi(S) = \sigma_a \circ \sigma_b(S) = \sigma_a(\sigma_b(S)) \overset{S \in b}{=\!=} \sigma_a(S) \overset{S \in a}{=\!=} S$$

tj. $\Pi(S) = S$

Tačka S jest fiksna tačka transformacije.

Dokažimo još njezinu jedinstvenost.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da

$$\exists X \neq S : \Pi(X) = X$$

$$a \cap b = \{S\} \text{ i } X \neq S \Rightarrow X \notin a \cap b$$

Razmotrimo dva slučaja:

1° $X \in b$

Tad $\sigma_b(X) = X$

$$\Pi(X) = \sigma_a(\sigma_b(X)) = \sigma_a(X) \overset{\Pi(X) = X}{=\!=\!=} X \Rightarrow X \in a$$

$$X \in a \text{ i } X \in b \Rightarrow X \in a \cap b$$

\# kontradikcija (sa $X \neq S$)

2° $X \notin b$

Tad $\sigma_b(X) = X'$ i $X \neq X'$ (b simetrala duži XX')

$$\Pi(X) = \sigma_a(\sigma_b(X)) = \sigma_a(X') \overset{\Pi(X) = X}{=\!=\!=} X \quad (a \text{ simetrala duži } XX')$$

$$a \text{ simetr. } XX' \text{ i } b \text{ simetr. } XX' \Rightarrow a \equiv b$$

\# kontradikcija (sa $a \neq b$)

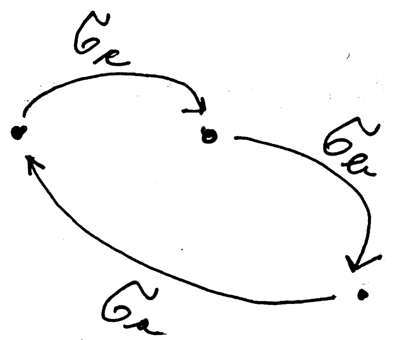
Pretpostavka da tačka S nije jedina fiksna tačka transformacije pod. Π nas je dovela u kontradikciju pa nije tačna.
Prema tome: S je jedina fiksna tačka transf. Π.

q.e.d.

Napomena: Primjetimo da je $\sigma_a \circ \sigma_b$ rotacija oko tačke S. Rotacija oko S ima jednu jedinu fiksnu tačku S.

(7.) Dokazati da kompozicija tri osno simetrije ne može biti identitet.

Rj. $\left.\begin{array}{l}\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c \\ \text{su tri osne simetrije}\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \neq id.$



Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. da je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = id.$

Znamo da je $\sigma_c \circ \sigma_c = \sigma_c^2 = id$

pa

$$\underbrace{\sigma_a \circ \sigma_b}_{\circ} \circ \sigma_c = \underbrace{\sigma_c}_{\circ} \circ \sigma_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c$$

Razmotrimo dva slučaja

$1°$ $a \neq b$

Na osnovu prethodnog zadatka transform. $\sigma_a \circ \sigma_b$ ima tačno jednu fiksnu tačku $\{S\} = a \cap b$.

σ_c ima beskonačno mnogo fiksnih tački (sve tačke prave c)

kontradikcija (sa $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c$)

$2°$ $a = b$

$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_a \circ \sigma_a = id = \sigma_c \Rightarrow \sigma_c = id$
kontradikcija
(osna simetrija nije identitet)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas dovodi do kontradikcije pa nije tačna. Prema tome

$$\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \neq id$$

q.e.d.

8. Naći sve involutivne transformacije podudarnosti u ravni (involutivna - sama sebi inverzna).

Rj. $\left.\begin{array}{l}\pi \text{ transformacija podudarnosti} \\ \pi \circ \pi = id\end{array}\right\} \Rightarrow \pi = ?$

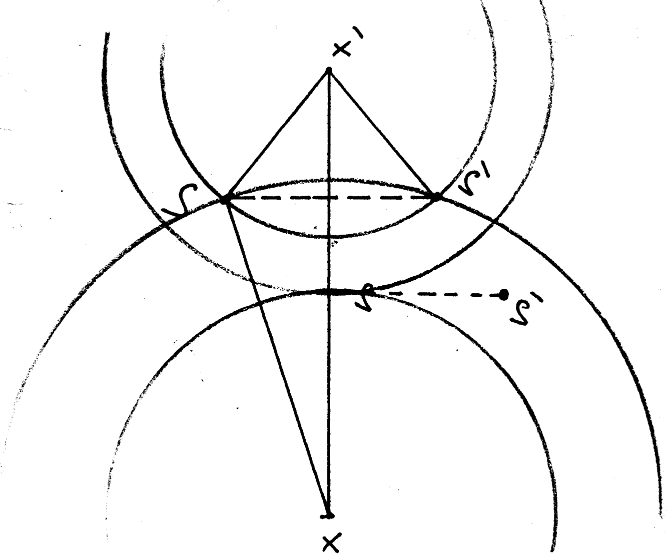
Odmah možemo primjetiti da je identična transformacija podudarnosti involutivna transformacija.

Neka je $\pi \neq id$ involutivna transformacija podudarnosti u ravni tj. $\pi \circ \pi = id$.
Naći ćemo tri nekolinearne tačke na kojima je π involucija.

$\pi \neq id \Rightarrow \exists X \in \alpha : \pi(X) = X' \;;\; X' \neq X$

Na duži XX' uzmimo tačku S za koju vrijedi $XS = X'S$.
Pretpostavimo da je $\pi(S) = S'$

Imam
$XS \cong \pi(X)\pi(S) = X'S'$
$X'S \cong \pi(X')\pi(S) = XS'$



$\left.\begin{array}{l} XS \cong X'S \\ XS \cong X'S' \\ X'S \cong XS' \end{array}\right\} \Rightarrow X'S' \cong X'S \Rightarrow S' \in k(X', X'S)$

$\left.\begin{array}{l} XS \cong X'S \\ XS \cong X'S' \\ X'S \cong XS' \end{array}\right\} \Rightarrow XS \cong XS' \Rightarrow S' \in k(X, XS)$

$\Rightarrow$ kako je $XS = X'S$ to $k(X', X'S) \cap k(X, XS) = \{S\}$

Iz čega slijedi da je $S \equiv S'$ tj. $\Pi(S) = S$.

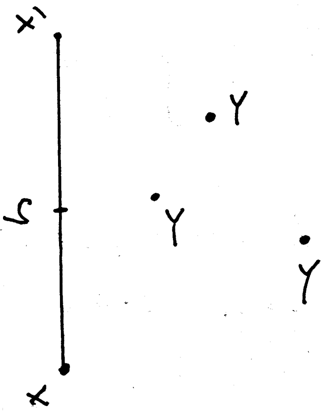
Našli smo dvije tačke X i S.

Pokažimo još da $\exists Y \in \alpha$ koja nije kolinearna sa X i S za koju vrijedi $\Pi(Y) = Y'$ i $Y \neq Y'$.

Ukoliko bi bilo $Y \in \alpha$ i $Y \notin p(X, S)$ i $\Pi(Y) = Y$

$$\Longrightarrow \quad XY \cong \Pi(X)\Pi(Y) \cong X'Y \quad \text{za } \forall (Y \in \alpha)\ Y \notin p(X,S)$$

\# nemoguće

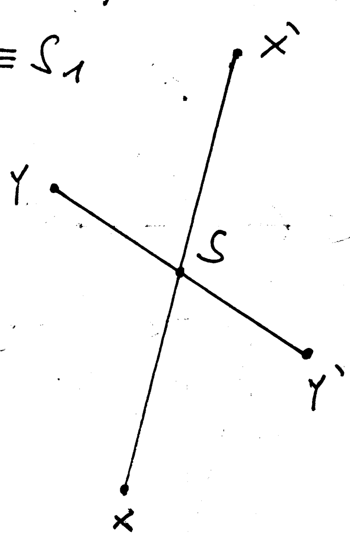


Znači $\exists Y \in \alpha : \Pi(Y) = Y'$ i $Y' \neq Y$ i $Y \notin p(X, S)$

Neka je S_1 sredina duži YY'. Na osnovu razmatranja za tačku X znamo da je $\Pi(S_1) = S_1$.

Posmatranjem slijedeća dva slučaja odredimo šta je Π.

1° $S \equiv S_1$



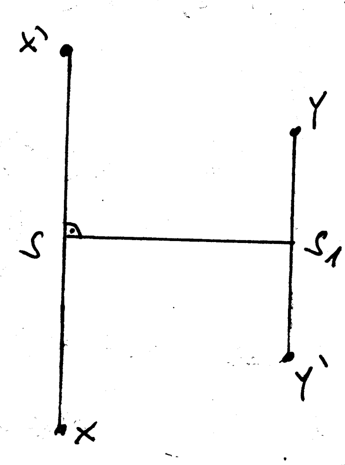
$$\left.\begin{array}{l} \Pi(X) = X' \\ \Pi(Y) = Y' \\ \Pi(S) = S \end{array}\right\} \text{ i } \left.\begin{array}{l} \sigma_S(X) = X' \\ \sigma_S(Y) = Y' \\ \sigma_S(S) = (S) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\Pi \equiv \sigma_S$$

2° $S \not\equiv S_1$

Pokažimo da je prava $p(S, S_1)$ okomita na XX'.



$$\left.\begin{array}{l} XS \cong X'S \\ SS_1 \cong SS_1 \\ XS_1 \cong \Pi(X)\Pi(S_1) = X'S_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \triangle XS_1S \cong \triangle X'S_1S$$

$$\Downarrow$$

$\measuredangle XSS_1 \cong \measuredangle X'SS_1 =$ prav ugao (naporedni uglovi)

$$p(S,S_1) \perp XX'$$

Kako je S sredina duži XX' $\Rightarrow$ $p(S,S_1)$ simetrala duži XX'

Uvedimo oznaku $s = p(S,S_1)$

$$\begin{array}{lcl} \Pi(S) = S & & \sigma_s(S) = S \\ \Pi(S_1) = S_1 & ; & \sigma_s(S_1) = S_1 \\ \Pi(X) = X' & & \sigma_s(X) = X' \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\Pi \equiv \sigma_s .$$

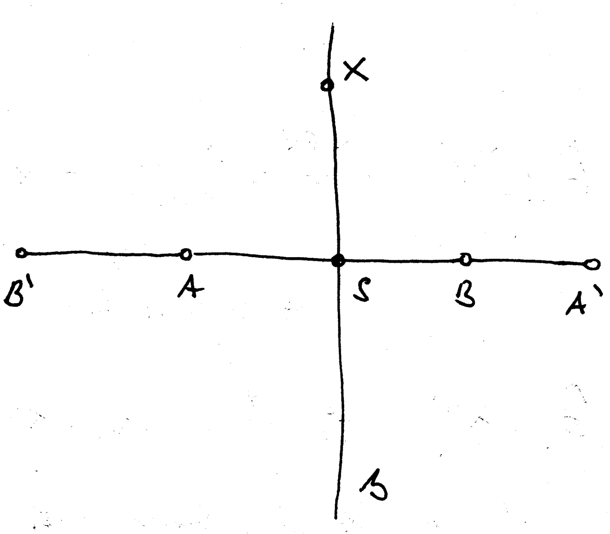
Jedine tri involutivne transformacije podudarnosti u ravni su identitet, osna simetrija i centralna simetrija.

9. Dokazati da je prava s simetrala duži AB ako i samo ako je $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B$.

R:

potreban uslov

"$\Rightarrow$": s simetrala duži AB $\Rightarrow$ $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B$.



Uzmimo tačku $X \in s$ takvu da $X \notin p(A,B)$. Neka je $s \cap AB = \{S\}$.

Za tri nekolinearne tačke A, B i X ćemo pokazati da vrijedi $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B$.

a) za tačku A

$$\sigma_A \circ \sigma_s(A) = \sigma_A(\sigma_s(A)) \xlongequal{s \text{ sim } AB} \sigma_A(B) = B' \Rightarrow$$ A sredina duži BB' i $B-A-B'$

$$\Downarrow$$

$$BA = B'A$$

$$\sigma_s \circ \sigma_B(A) = \sigma_s(\sigma_B(A)) = \sigma_s(A') \Rightarrow$$ B sredina duži AA' i $A-B-A'$

$$\Downarrow$$

$$AB = BA'$$

$s \cap AB = \{S\}$, S sredina duži AB $\Rightarrow AS = BS$

$$\left.\begin{array}{l} BA = B'A \\ AB = BA' \\ AS = BS \end{array}\right\} \Rightarrow AB' + AS = BA' + BS \Rightarrow SB' = SA' \Rightarrow$$ S sredina duži $A'B'$

$S \in s$ i $s \perp p(A,B) = p(A',B') \Rightarrow$ s simetrala duži $A'B'$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_s(A') = B'$$

Imamo

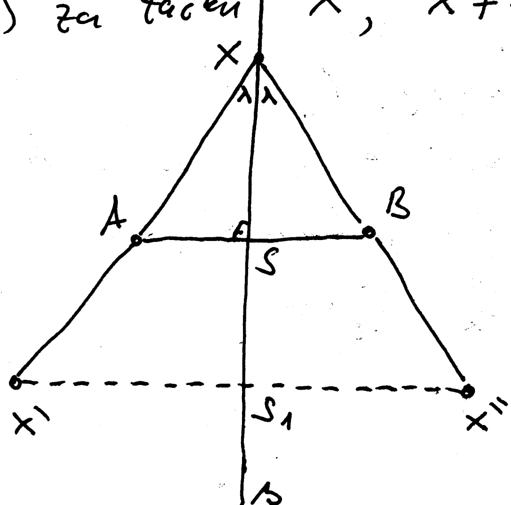
$$\sigma_A \circ \sigma_s(A) = \sigma_s \circ \sigma_B(A) = B'$$

b) za tačku B

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_A \circ \sigma_s(B) = \sigma_A(\sigma_s(B)) \xlongequal{s \text{ sim } AB} A \\ \sigma_s \circ \sigma_B(B) = \sigma_s(\sigma_B(B)) = \sigma_s(B) \xlongequal{s \text{ sim } AB} A \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_s(B) = \sigma_s \circ \sigma_B(B) = A$$

c) za tačku X, $X \neq S$ i $X \in s$.



$$\sigma_A \circ \sigma_s(X) = \sigma_A(\sigma_s(X)) \xlongequal{X \in s} \sigma_A(X) = X'$$

$$\Downarrow$$

A sredina duži XX'

$$\sigma_s \circ \sigma_B(X) = \sigma_s(X'') \Rightarrow$$ B sredina XX''

Trebamo pokazati da je s simetrala duži $X'X''$

$$\left.\begin{array}{l} AS \cong BS \\ \measuredangle ASX \cong \measuredangle BSX = \text{prav ugao} \\ SX \cong SX \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle AXS \cong \triangle BXS$$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle AXS = \measuredangle BXS = \lambda \quad i \quad AX \cong BX$$

Neka je $s \cap x'x'' = \{S_1\}$.

$$\left.\begin{array}{l} XX' = 2AX = 2BX = XX'' \\ \measuredangle S_1XX' \cong \measuredangle S_1XX'' = \lambda \\ XS_1 \cong XS_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \triangle XS_1X' \cong \triangle XS_1X''$$

$$\Downarrow$$

$$X'S_1 \cong X''S_1 \quad i \quad \measuredangle XS_1X' \cong \measuredangle XS_1X'' = \text{prav ugao}$$

(naporedni uglovi)

Pa je s sim $x'x''$ $\Rightarrow$ $\sigma_s(X'') = X'$

$$\sigma_A \circ \sigma_s(X) = \sigma_s \circ \sigma_B(X) = X'$$

Pokazali smo da je

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_A \circ \sigma_s(A) = \sigma_s \circ \sigma_B(A) \\ \sigma_A \circ \sigma_s(B) = \sigma_s \circ \sigma_B(B) \\ \sigma_A \circ \sigma_s(X) = \sigma_s \circ \sigma_B(X) \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{nekolinearne tačke}]{A, B, X \text{ tri}} \sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B$$

q.e.d.

dovoljan uslov

"$\Leftarrow$": $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B \Rightarrow s$ simetrala duži AB

$\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B \quad / \circ \sigma_s$ sa desne strane

$$\sigma_A \circ \underbrace{\sigma_s \circ \sigma_s}_{id} = \sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s \Rightarrow \sigma_A = \sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s$$

Ako dokažemo da je $\sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s = \sigma_{\sigma_s(B)}$ dobićemo da je

$$\sigma_A = \sigma_{\sigma_s(B)} \quad \text{tj.} \quad A = \sigma_s(B).$$

Posmatrajmo transformaciju podudarnosti

$$\mu = \sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s.$$

Neka je $\sigma_s(B) = X$ tj. s simetrala duži BX

$$\gamma(x) = \sigma_s(\sigma_B(\sigma_s(x))) \xlongequal{s \text{ sim } BX} \sigma_s(\sigma_B(B)) = \sigma_s(B) \xlongequal{s \text{ sim } BX} X$$

to je $\gamma(x) = X$. ...(1)

Kako je još

$$\gamma \circ \gamma = \sigma_s \circ \sigma_B \circ \underbrace{\sigma_s \circ \sigma_s}_{id} \circ \sigma_B \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \underbrace{\sigma_B \circ \sigma_B}_{id} \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_s = id$$

tj. $\gamma \circ \gamma = id$ ...(2)

to iz (1) i (2) zaključujemo da je γ involutivna transformacija. Prema prethodnom zadatku involutivne transformacije su
- identitet
- osna simetrija
- centralna simetrija.

Ako γ ima samo jednu fiksnu tačku X, γ je centralna simetrija s centrom simetrije u X.
Ako γ ima više od jedne fiksne tačke, γ je osna simetrija ili identitet.

Pretpostavimo da $\exists Y : \gamma(Y) = Y$

$$\sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s(Y) = Y \quad / \sigma_s \text{ sa lijeve strane}$$

$$\underbrace{\sigma_s \circ \sigma_s}_{id} \circ \sigma_B \circ \sigma_s(Y) = \sigma_s(Y) \Rightarrow \sigma_B \circ \sigma_s(Y) = \sigma_s(Y) \quad ...(*)$$

Neka je $\sigma_s(Y) = Y'$ tj. s je simetrala duži YY'

$$\sigma_B(\sigma_s(Y)) = \sigma_B(Y') \overset{*}{=} Y' \Rightarrow Y' \equiv B \quad \text{tj. } \sigma_s(Y) = B$$

Sad imamo $\sigma_s(X) = B = \sigma_s(Y) \Rightarrow X \equiv Y$

$\Downarrow$

γ ima samo jednu fiksnu tačku i to je tačka X

$$\gamma = \sigma_X = \sigma_{\sigma_s(B)} \Rightarrow \sigma_A = \sigma_s \circ \sigma_B \circ \sigma_s = \sigma_{\sigma_s(B)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sigma_A = \sigma_{\sigma_s(B)} \Rightarrow \sigma_s(B) = A \Rightarrow s$ simetrala duži AB

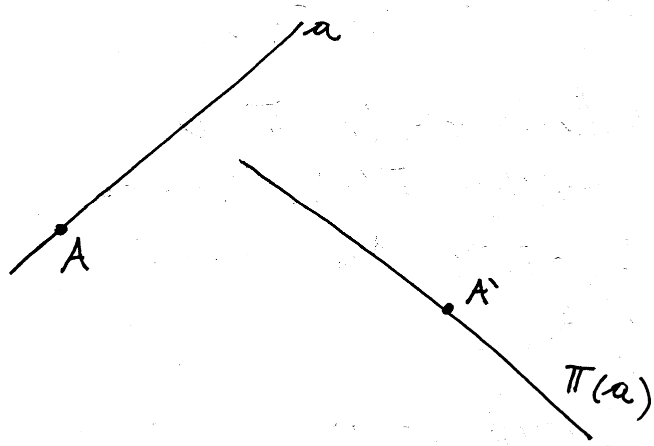
q. e. d.

(10.) Data je transformacija podudarnosti Π. Dokazati da su sve tačke prave $\Pi(a)$ fiksne tačke transformacije $\alpha = \Pi \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti šta predstavlja transformacija α.

(Fiksna tačka (prava) transformacije Π je svaka tačka A (prava a) za koju je $\Pi(A) = A$ (tj. $\Pi(a) = a$).)

Rj.

$$\left.\begin{array}{l} \text{transformacija podudarnosti } \Pi \\ \text{prava } a \\ \text{prava } \Pi(a) \\ \text{transform. podud. } \alpha = \Pi \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \forall x \in \Pi(a) \quad \alpha(x) = x \\ \text{i} \quad \alpha = ? \end{array}$$



Uzmimo proizvoljnu tačku $A' \in \Pi(a)$.

To znači $\exists A \in a : \Pi(A) = A'$.

$$\alpha(A') = \Pi \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1}(A') =$$

$$= \Pi(\sigma_a(\Pi^{-1}(A'))) = \Pi(\sigma_a(\Pi^{-1}(\Pi(A))))$$

$$= \Pi(\sigma_a(A)) \overset{A \in a}{=\!=} \Pi(A) = A'$$

tj. dobio sam $\alpha(A') = A'$.

Kako je A' proizvoljna tačka prave $\Pi(a)$ to $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sve tačke prave $\Pi(a)$ su fiksne tačke transformacije

q. e. d.

Odredimo šta predstavlja transformacija podudarnosti α.

$$\alpha \circ \alpha = \Pi \circ \sigma_a \circ \underbrace{\Pi^{-1} \circ \Pi}_{\substack{id \\ \text{(neutralni element za kompoziciju)}}} \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1} = \Pi \circ \sigma_a \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1} = \Pi \circ \Pi^{-1} = id \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha$ je invultivna transformacija, što znači α može biti:

- identitet
- osna simetrija
- centralna simetrija

α nije centralna simetrija.

Pitanje: Zašto?

(pomoć: centralna simetrija ima tačno jednu fiksnu tačku.)

Ako bi bilo $\alpha = id \Rightarrow \Pi \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1} = id$ $\quad / \circ \Pi$ sa desne str.

$\Pi \circ \sigma_a \circ \Pi^{-1} \circ \Pi = id \circ \Pi = \Pi \Rightarrow \Pi \circ \sigma_a = \Pi$ $\quad / \circ \Pi^{-1}$ sa lijeve str.

$$\Pi^{-1} \circ \Pi \circ \sigma_a = \Pi^{-1} \circ \Pi$$

$$\sigma_a = id$$

#kontradikcija

(osna simetrija nije identitet)

Ostaje nam da je α osna simetrija

(čije su sve tačke prave $\Pi(a)$ fiksne tačke)

$\Rightarrow$ prava $\Pi(a)$ je osa simetrije tj. $\alpha = \sigma_{\Pi(a)}$.

11. Data je transformacija podudarnosti Π u ravni. Dokazati da je samo tačka $\Pi(A)$ fiksna tačka transformacije $\alpha = \Pi \circ \sigma_A \circ \Pi^{-1}$. Na osnovu toga odrediti transformaciju α.

Rj. transformacija podudarnosti Π

tačka A

tačka $\Pi(A)$

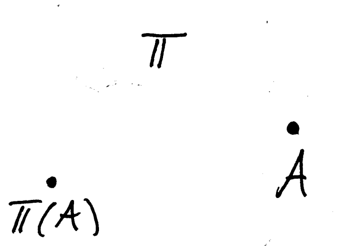
transformacija $\alpha = \Pi \circ \sigma_A \circ \Pi^{-1}$

$\Rightarrow$ $\alpha(\Pi(A)) = \Pi(A)$

$\forall \Pi(x) \neq \Pi(A) \quad \alpha(\Pi(x)) \neq \Pi(x)$

$\alpha = ?$

Provjerimo da li je tačka $\Pi(A)$ fiksna tačka transformacije podudarnosti α.



$$\alpha(\Pi(A)) = \Pi \circ \sigma_A \circ \Pi^{-1}(\Pi(A)) = \Pi(\sigma_A(\underbrace{\Pi^{-1}(\Pi(A))}_{A})) =$$

$$= \Pi(\sigma_A(A)) = \Pi(A)$$

dobi sam da je $\alpha(\Pi(A)) = \Pi(A)$

$\Pi(A)$ je fiksna tačka tačka transformacije α

Pretpostavimo da pored tačke $\Pi(A)$ $\exists \Pi(X)$ takva da je

$$\alpha(\Pi(X)) = \Pi(X)$$

$$\Pi \circ \sigma_A \circ \Pi^{-1}(\Pi(X)) = \Pi(\sigma_A(\underbrace{\Pi^{-1}(\Pi(X))}_{X})) = \Pi(\sigma_A(X)) \qquad = \Pi(X)$$

$$\Pi \circ \sigma_A(X) = \Pi(X) \qquad / \circ \Pi^{-1} \text{ sa lijeve strane}$$

$$\sigma_A(X) = X \quad \Rightarrow \quad A \equiv X$$ pa zaključujemo da je

$\Pi(A)$ jedina fiksna tačka transformacije α

q. e. d.

odredimo α

$$\alpha \circ \alpha = \Pi \circ \sigma_A \circ \underbrace{\Pi^{-1} \circ \Pi}_{} \circ \sigma_A \circ \Pi^{-1} = \Pi \circ \underbrace{\sigma_A \circ \sigma_A}_{} \circ \Pi^{-1} = \Pi \circ \Pi^{-1} = id$$

$\Rightarrow \alpha$ involtivna transformacija

pa je
a) α identitet ili
b) α osna simetrija ili
c) α centralna simetrija

α nije osna simetrija. Zašto?
α nije identitet. Zašto?

$\Rightarrow \alpha$ je centralna simetrija sa centrom u tački $\Pi(A)$

$$\alpha = \Pi \circ \sigma_A \circ \Pi^{-1} = \sigma_{\Pi(A)} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \sigma_{\Pi(A)}$$

q. e. d.

12. Riješimo na drugi način dovoljan uslov zadatka 9.

Rj. $\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B \quad \Rightarrow \quad s$ simetrala duži AB

$$\sigma_A \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \sigma_B \qquad / \circ \sigma_s \text{ sa lijeve strane}$$

$\sigma_B = \sigma_s \circ \sigma_A \circ \sigma_s$ pa na osnovu prethodnog zadatka i kako je $\sigma_s = \sigma_s^{-1}$

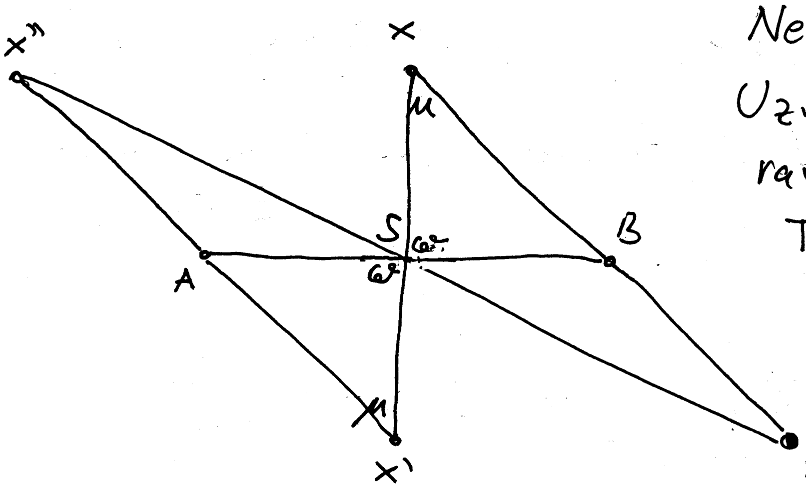
$$\Rightarrow \sigma_B = \sigma_s \circ \sigma_A \circ \sigma_s^{-1} = \sigma_{\sigma_s(A)} \Rightarrow \sigma_B = \sigma_{\sigma_s(A)} \Rightarrow B = \sigma_s(A) \Rightarrow s \text{ sim } AB$$

q. e. d.

13. Dokazati da je S sredina duži AB akko vrijedi $\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$.

Rj potreban uslov

„$\Rightarrow$": S sredina duži $AB \Rightarrow \sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$



Neka je S sredina duži AB. Uzmimo proizvoljnu tačku iz ravni $X \notin p(A,B)$. Tačke A, B i X su nekolinearne. Da bi dokazali jednakost

$$\sigma_A \circ \sigma_S = \sigma_S \circ \sigma_B$$

trebamo dokazati da je tačna na tri nekolinearne tačke.

Dokaz za tačke A i B ostavljamo za vježbu.

Dokažimo za tačku X, X proizvoljna tačka ravni.

$\sigma_A \circ \sigma_S(X) = \sigma_A(\sigma_S(X)) = \sigma_A(X') = X'' \Rightarrow$ S sredina duži XX', A sredina duži $X'X''$

$\sigma_B(X) = X''' \Rightarrow B$ sredina duži XX'''.

Trebam dokazati da je S sredina duži $X''X'''$.

$$\left.\begin{array}{l} XS \cong X'S \\ \measuredangle XSB \cong \measuredangle ASX' = \omega \text{ (unakrsni uglovi)} \\ AS = BS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta ASX' \cong \Delta XSB$$

$$\Downarrow$$

$$AX' \cong BX \text{ i}$$

$$\text{i } \measuredangle SXB \cong \measuredangle SX'A = \mu$$

$$\left.\begin{array}{l} B \text{ sredina } XX'' \Rightarrow BX \cong BX''' \\ A \text{ sredina } X'X'' \Rightarrow AX' \cong AX'' \\ \qquad AX' \cong BX \end{array}\right\} \Rightarrow X'X'' \cong XX'''$$

$$\left.\begin{array}{l} X'X'' \cong XX''' \\ \measuredangle X''X'S = \measuredangle SXX''' = \mu \\ XS = X'S \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta X''X'S \cong \Delta SXX'''$$

$$\Downarrow$$

$$X''S \cong X'''S$$

Pitanje: Zašto je S sredina duži $x''x'''$?

Znači $\sigma_S(x''') = x''$

Dobili smo
$$\left.\begin{array}{l} \sigma_A\circ\sigma_S(x) = x'' \\ \sigma_S\circ\sigma_B(x) = x'' \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_A\circ\sigma_S(x) = \sigma_S\circ\sigma_B(x)$$

Prema tome, dobili smo
$$\left.\begin{array}{l} \sigma_A\circ\sigma_S(A) = \sigma_S\circ\sigma_B(A) \\ \sigma_A\circ\sigma_S(B) = \sigma_S\circ\sigma_B(B) \\ \sigma_A\circ\sigma_S(x) = \sigma_S\circ\sigma_B(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \sigma_A\circ\sigma_S = \sigma_S\circ\sigma_B$$

q.e.d.

dovoljan uslov

"$\Leftarrow$": $\sigma_A\circ\sigma_S = \sigma_S\circ\sigma_B \Rightarrow S$ sredina duži AB

$\sigma_A\circ\sigma_S = \sigma_S\circ\sigma_B \quad /\circ\sigma_S$ sa desne strane

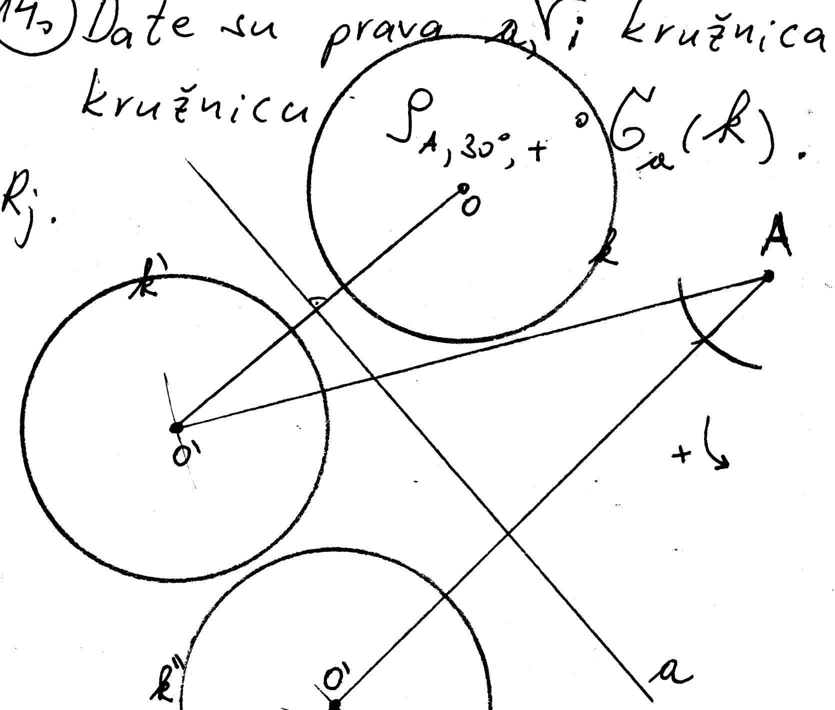
$\sigma_A = \sigma_S\circ\sigma_B\circ\sigma_S \quad$ kako je $\sigma_S = \sigma_S^{-1}$ na osnovu 11. zadatka

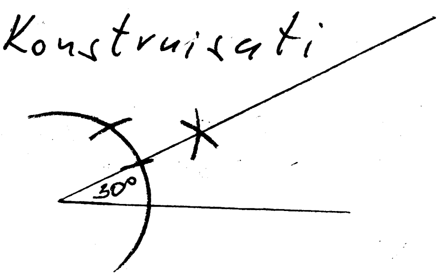
$\sigma_A = \sigma_{\sigma_S(B)} \Rightarrow A = \sigma_S(B) \Rightarrow S$ sredina duži AB

q.e.d.

(14.) Date su prava a, tačka A i kružnica k. Konstruisati kružnicu $\rho_{A,30°,+}\circ\sigma_a(k)$.

Rj.

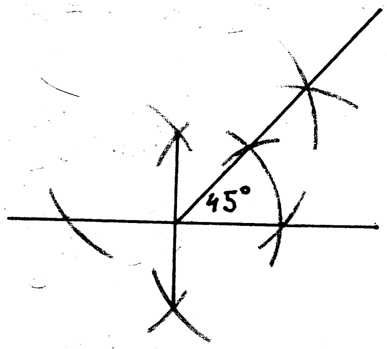


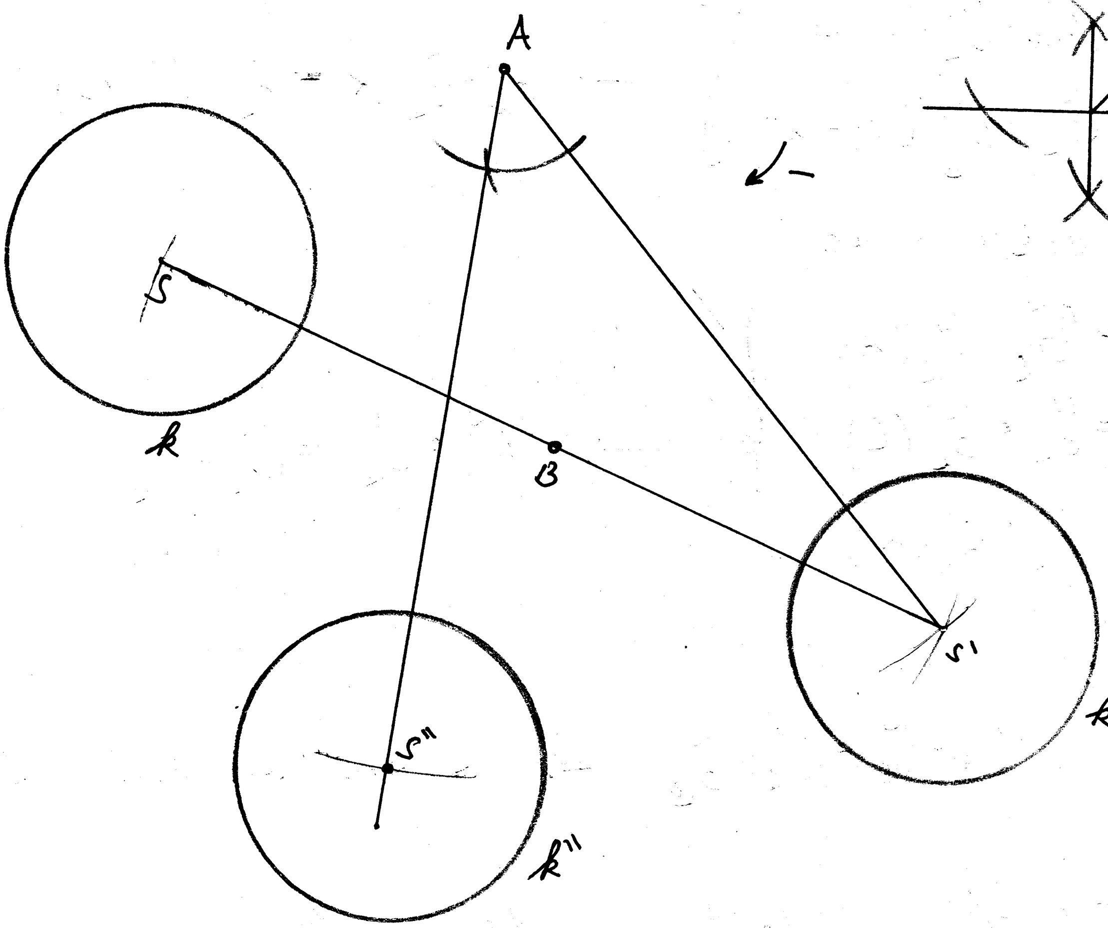


$$\rho_{A,30°,+}\circ\sigma_a(k) = \rho_{A,30°,+}(\sigma_a(k)) = \rho_{A,30°,+}(k') = k''$$

15. Date su tačke A i B i kružnica k. Konstruisati kružnicu $\rho_{A,45^\circ,-} \circ \sigma_B(k)$.

Rj.





$$\rho_{A,45^\circ,-} \circ \sigma_B(k) = \rho_{A,45^\circ,-}(\sigma_B(k)) = \rho_{A,45^\circ,-}(k') = k''$$

16. Date su proizvoljne tačke T, S, prava a i $\triangle ABC$. Konstruisati trouglove:

a) $\sigma_a \circ \rho_{T,60^\circ,+}(\triangle ABC)$;

b) $\sigma_S \circ \rho_{T,90^\circ,-} \circ \sigma_a(\triangle ABC)$.

Zadaci za vježbu:

17. Ako je Π transformacija podudarnosti za koju važi $\Pi(A)=A$, $\Pi(B)=B$, $\Pi(C)=C$, gdje su A, B i C tri nekolinearne tačke, tada je Π identička transformacija. Dokazati.

18. Neka je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_d$. Dokazati sljedeća tvrđenja:

a) Ako se prave a i b sijeku u tački S, tada se i prave c i d sijeku u tački S;

b) Ako su prave a i b normalne na pravu s, tada su i prave c i d normalne na pravu s.

19. Dokazati da je proizvod tri osne simetrije osna simetrija ako i samo ako sve tri ose pripadaju istom pramenu pravih.

Napomena: Pramen pravih je skup svih pravih koje prolaze kroz istu tačku (eliptičan pramen) ili skup svih pravih koje su normalne na istu pravu (hiperboličan pramen).

20. Ako su a, b i c tri prave iz istog pramena, tada je $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c = \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a$. Dokazati.

21. Dokazati da je tačka A incidentna sa pravom s ako i samo ako je $\sigma_s \circ \sigma_A = \sigma_A \circ \sigma_s$.

22. Dokazati da su prave a i b uzajamno normalne ako i samo ako je $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$.

23. Prave a i b su ose simetrije ravne figure F. Dokazati da je i prava c, koja je simetrična pravoj a u odnosu na pravu b, takođe osa simetrije figure F.

Napomena: Prava s je osa simetrije figure F ako je $\sigma_s(F) = F$.

24. Ako ravna figura ima tačno dvije ose simetrije, tada su one uzajamno normalne. Dokazati

25. Koliko centara simetrije može da ima ravna figura?

26. Dokazati da se raznostraničan trougao, tj. trougao koji nema podudarnih stranica, ne može podijeliti jednom pravom na dva podudarna trougla.

27. Na koliko načina se jednakostraničan trougao može podijeliti jednom pravom na dva podudarna trougla?

Upute:

Za 23. - Neka je $\sigma_a(F) = F$, $\sigma_b(F) = F$ i $c = \sigma_b(a)$. Tada je (Zašto?) $\sigma_c(F) = \sigma_{\sigma_b(a)}(F) = \sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_b(F) = F$.

Za 24. - Ako su a i b, $a \neq b$, jedine ose simetrije figure F, tada je, (na osnovu ?) ili $\sigma_a(b) = a$ ili $\sigma_a(b) = b$. U prvom je slučaju $b \equiv a$, što je suprotno uslovu zadatka, a u drugom $a \perp b$, što i treba da se dokaže.

Za 25. - 0, 1 ili ∞. Pokazati da ukoliko neka figura ima više od jednog centra simetrije, tada ih ima beskonačno

Za 26. - Pretpostavimo da se trougao $\triangle ABC$ $(AB > BC > CA)$ može podijeliti pravom na dva podudarna trougla. Očigledno, ta prava je incidentna sa nekim tjemenom trougla. Neka je to tjeme A. Obilježimo sa D tačku u kojoj siječe stranicu BC...

Za 27. - Na tri načina ...